FORMULA DI EULERO PER I POLIEDRI

In geometria solida, la formula di Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 – San Pietroburgo, 18 settembre 1783) mette in relazione il numero delle facce (*F*), il numero degli spigoli (*S*) ed il numero dei vertici (*V*) di un poliedro semplice. Tale semplice formula afferma che:

$$V-S+F=2$$

V=Vertici (congiungimento di spigoli)

S=Spigoli (congiungimento di facce contigue)

F=Facce (poligoni che costituiscono il poliedro)

La dimostrazione presentata è quella che propose il matematico *Cauchy* (Parigi, 21 agosto 1789 – Sceaux, 23 maggio 1857) all'età di 20 anni e procede per operazioni matematiche che *deformano* il poliedro in maniera tale che il numero di vertici, spigoli e facce rimanga inalterato. Lo scopo di tali operazioni è portare il poliedro, considerato cavo e senza *buchi*, ad uno stato più semplice sul quale procedere al conteggio effettivo di facce, spigoli e vertici.

Immaginiamo, pertanto, di privare il poliedro di una delle sue facce, costituite tutte da poligoni convessi; se in tale scenario si riuscisse a provare che ***V-S+F=1*** allora il poliedro originale soddisferebbe la formula di Eulero; basterebbe riaggiungere la faccia elisa.

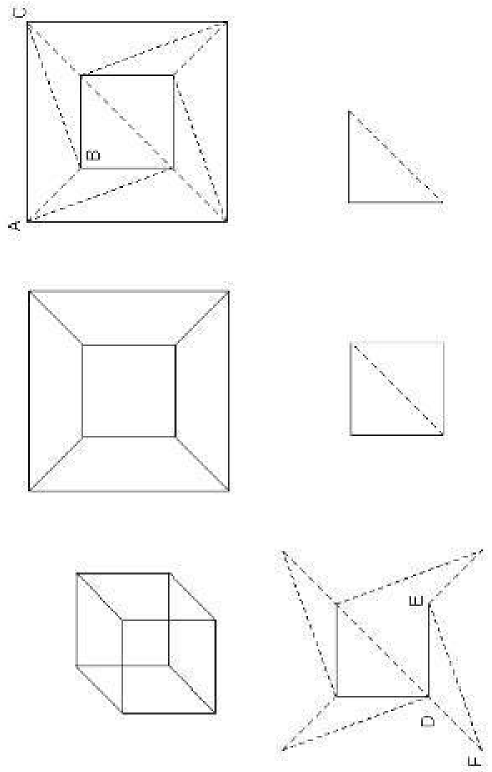
Una volta privato di una delle sue facce, il poliedro può essere reso complanare e quindi diventare una struttura piana le cui facce sono triangoli o, in generale, poligoni. Ora si proceda alla "triangolazione" delle facce che non sono triangoli, congiungendo i vertici che non giacciono sullo stesso spigolo; pertanto un quadrilatero può essere partizionato in due triangoli, un pentagono in tre triangoli, e così via un poligono di *n* lati in *n-2* triangoli. In questo modo ogni triangolo della partizione aggiunge alla configurazione originale una faccia ma anche uno spigolo, senza modificare il numero di vertici; pertanto la quantità ***V-F+S*** rimane inalterata.

Ora si procede dai triangoli che hanno almeno un lato (spigolo) sul contorno esterno del reticolato e si elide la faccia ed il lato del reticolato che si trova sul bordo, ossia che non abbia uno spigolo comune con un altro triangolo. Tale operazione lascia la quantità ***V-S+F*** inalterata in quanto si sottrae uno da F ed uno da S.

Altro scenario possibile è che uno dei triangoli sul bordo del reticolato abbia due spigoli su tale bordo ed uno comune con un altro triangolo contiguo. In tal caso elidiamo la faccia, i due spigoli esterni ed il vertice a comune tra i due. Anche in questo caso la quantità ***V-S+F*** rimane inalterata in quanto si sottrare uno da F, due da S ed uno da V.

Al passo successivo di questa *retrazione* abbiamo, sul bordo del reticolato, la presenza oltre che di triangoli, per i quali le operazioni di elisione sono quelle di cui sopra, anche di spigoli rimasti isolati con il relativo vertice esterno, l'atro comune con almeno un altro spigolo. In tale caso elidiamo lo spigolo ed il vertice isolato, pertanto la quantità ***V-S+F*** rimane inalterata, per via del fatto che si sottrae uno da V ed uno da S.

Procedendo induttivamente nei modi sopra descritti si arriva ad un triangolo solo per cui ***V=3, S=3, F=1*** e quindi banalmente ***V-S+F=1*** che è quanto volevamo.



Il disegno qui sopra riassume il procedimento di retrazione descritto.

I 5 POLIEDRI REGOLARI, ANCHE DETTI PLATONICI

Tramite la formula di Eulero è possibile dimostrare l'esistenza di soli cinque solidi regolari, ossia poliedri convessi le cui facce sono tutti poligoni regolari congruenti tra loro ed i cui vertici e spigoli siano equivalenti, ossia sovrapponibili tramite rotazione; pertanto anche gli angoloidi hanno la stessa ampiezza. Questi sono, dettaglio, il tetraedro (4 triangoli equilateri), il cubo (6 quadrati), l'ottaedro (8 triangoli equilateri), il dodecaedro (12 pentagoni) ed infine l'icosaedro (20 triangoli equilateri).

Procediamo, quindi, con la dimostrazione. Indichiamo con *n* il numero di spigoli (lati) di ciascun poligono regolare che costituisce le facce del poliedro e con *r* il numero di spigoli convergenti in ciascun vertice. Pertanto, visto che ogni spigolo è a comune con due facce, si ha che *nF=2S*. Analogamente visto che ogni spigolo è costituito da due vertici di bordo, allora si ha che *rV=2S*.

Pertanto *nF=2S=rV*; esplicitando *F* e *V* dalle uguaglianze si ottiene $F=\frac{2S}{n}$ e $V=\frac{2S}{r}$. Sostituendo nella formula di Eulero otteniamo $\frac{2S}{r}-S+\frac{2S}{n}=2$ da cui dividendo per *2S* ambo i membri otteniamo $\frac{1}{r}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{S}$, ossia

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{S}$$

Visto che, per ovvi motivi geometrici, $n\geq 3$ ed anche $r\geq 3$ e che non è possibile avere simultaneamente $n>3$ ed $r>3$ in quanto se così fosse la quantità $\frac{1}{n}+\frac{1}{r}$ non potrebbe essere maggiore di $\frac{1}{2}$, allora si ha che una delle due quantità *n* ed *r* deve essere fissata costante a 3. Inoltre, per la stessa considerazione di cui sopra, né *n* né *r* potranno essere maggiori di 5 in quanto $\frac{1}{n}+\frac{1}{r}$ deve essere maggiore di $\frac{1}{2}$.

Questo seleziona solo i seguenti scenari possibili:

1. $n=r=3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; S=6\ ;\ V=F=4$

   tetraedro

2. $n=3\ ;\ r=4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{12} \;\Rightarrow\; S=12\ ;\ V=6\ ;\ F=8$

   ottaedro

3. $n=3\ ;\ r=5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{30} \;\Rightarrow\; S=30\ ;\ V=12\ ;\ F=20$

   icosaedro

4. $n=4\ ;\ r=3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{12} \;\Rightarrow\; S=12\ ;\ V=8\ ;\ F=6$

   cubo

5. $n=5\ ;\ r=3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{S}=\frac{1}{30} \;\Rightarrow\; S=30\ ;\ V=20\ ;\ F=12$

   dodecaedro

I 13 SOLIDI ARCHIMEDEI

Un solido archimedeo, o semiregolare, è un poliedro convesso le cui facce sono costituite da due o più tipi di poligoni regolari ed i cui vertici sono omogenei, ossia in ogni vertice confluisce lo stesso numero di spigoli ed in ogni angoloide confluisce lo stesso numero e tipologia di facce.

Vediamo ora come ottenere i 13 solidi archimedei tramite le suddette operazioni di troncamento:

Tetraedro => Tetraedro troncato

Cubo => Cubo troncato => Cubottaedro

Ottaedro => Ottaedro troncato

Dodecaedro => Dodecaedro troncato => Icosidodecaedro => Icosidodecaedro tr.

Icosaedro => Icosaedro troncato

Cubottaedro => Cubottaedro troncato => Rombicubottaedro

Cubottaedro => Cubottaedro camuso

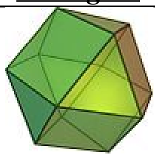
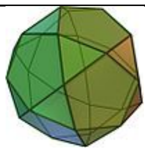
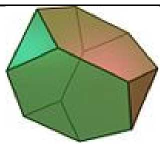
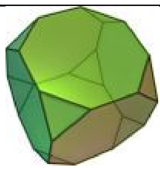
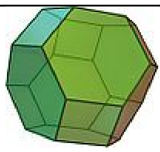
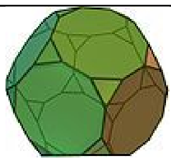
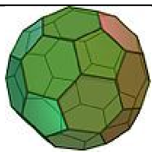
Icosaedro => Icosaedro camuso

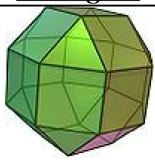
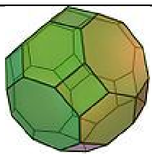
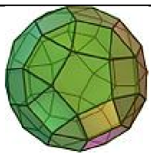
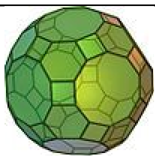
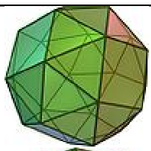
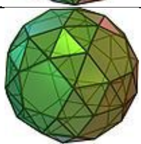
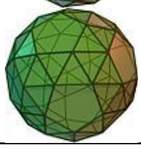
Nota: perché fu scelto l'icosaedro troncato per fare il pallone da calcio? Probabilmente perché pur non avendo la massima *rotondità* ossia l'angoloide di massima misura possibile (l'icosidodecaedro troncato abbiamo visto avere un angoloide di 354° contro i 348° dell'icosaedro troncato), aveva il vantaggio di avere solo 32 facce contro le 62 del rivale; quest'ultimo, pertanto, sarebbe stato più soggetto a rottura per via dei numerosi punti di giunzione. Inoltre i costi sarebbero stati superiori, per via, appunto, del numero più consistente di facce da cucire.

Tali poliedri sono 13, 15 se si considerano le versioni speculari dei due *chirali* ossia di quelli non equivalenti alla loro immagine riflessa.

Tali solidi, trattati dallo scienziato siracusano in un'opera andata perduta, venivano ottenuti dai solidi platonici per operazioni di troncatura opportuna dei vertici, attraverso un piano, anche ripetuta più volte. Indichiamo con *incidenza* il numero e la sequenza di spigoli confluenti in ogni vertice e con *rotondità* la misura dell'angoloide di ciascun vertice. La classificazione diviene pertanto la seguente:

Immagini tratte dal sito www.*wikipedia.it*

Nome	***Immagine***	***Facce***	***Spigoli***	***Vertici***	***Incidenza***	***Rotondità***
Cubottaedro		14 (8 triangoli, 6 quadrati)	24	12	3,4,3,4 (triangolo, quadrato, triangolo, quadrato)	300°
Icosidodecaedro		32 (20 triangoli, 12 pentagoni)	60	30	3,5,3,5 (triangolo, pentagono, triangolo, pentagono)	336°
Tetraedro troncato		8 (4 triangoli, 4 esagoni)	18	12	3,6,6 (triangolo, esagono, esagono)	300°
Cubo troncato		14 (8 triangoli, 6 ottagoni)	36	24	3,8,8	330°
Ottaedro troncato		14 (6 quadrati, 8 esagoni)	36	24	4,6,6 (quadrato, esagono, esagono)	330°
Dodecaedro troncato		32 (20 triangoli, 12 decagoni)	90	60	3,10,10 (triangolo, decagono, decagono)	348°
Icosaedro troncato (pallone da calcio)		32 (12 pentagoni, 20 esagoni)	90	60	5,6,6 (pentagono, esagono, esagono)	348°

Nome	***Immagine***	***Facce***	***Spigoli***	***Vertici***	***Incidenza***	***Rotondità***
Rombicubottaedro		26 (8 triangoli, 18 quadrati)	48	24	3,4,4,4 (triangolo, quadrato, quadrato, quadrato)	330°
Cubottaedro troncato		26 (12 quadrati, 8 esagoni, 6 ottagoni)	72	48	4,6,8 (quadrato, esagono, ottagono)	345°
Rombicosidodecaedro		62 (20 triangoli, 30 quadrati, 12 pentagoni)	120	60	3,4,5,4 (triangolo, quadrato, pentagono, quadrato)	348°
Icosidodecaedro troncato		62 (30 quadrati, 20 esagoni, 12 decagoni)	180	120	4,6,10 (quadrato, esagono, decagono)	354°
Cubo camuso (2 forme chirali)	 	38 (32 triangoli, 6 quadrati)	60	24	3,3,3,3,4 (triangolo, triangolo, triangolo, triangolo, quadrato)	330°
Dodecaedro camuso (2 forme chirali)	 	92 (80 triangoli, 12 pentagoni)	150	60	3,3,3,3,5 (triangolo, triangolo, triangolo, triangolo, pentagono)	348°