

Il postulato di Archimede

<p>Postulato di Archimede (Sulle spirali, lettera introduttiva)</p> <p><i>Date due grandezze A e B con $A < B$ esiste un intero m tale che $mA > B$</i></p>	<p>le due proposizioni sono equivalenti</p>	<p style="text-align: right;">Euclide (Elementi, Libro X proposizione 1)</p> <p><i>Date due grandezze diseguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore inizialmente considerata.</i></p>
--	---	--

Dimostriamo l'equivalenza

Usando il postulato di Archimede possiamo dimostrare la proposizione di Euclide e viceversa. Siano A ed E le due grandezze e sia A la maggiore. Sia A_1 la grandezza ottenuta levando ad A una parte maggiore della sua metà. Sarà allora $A_1 < A/2$. Leviamo ora ad A_1 una grandezza maggiore della sua metà, la grandezza rimanente A_2 sarà minore di $A_1/2 < A/4$. Proseguendo in questo modo troveremo una grandezza A_n minore di $(1/2)^n A$. Vogliamo dimostrare che, per n abbastanza grande tale grandezza è minore di E. Usando il postulato di Archimede possiamo affermare che da un certo m in poi, $A < mE$ cioè $(1/m)A < E$ e, non appena sia $2^n > m$, risulta $A_n < (1/2^n)A < (1/m)A < E$.

La geometria del segmento parabolico

$py = x^2$
 $A=(a;a^2)$, $B=(b;b^2)$, $a > b$

Il triangolo inscritto ha un lato uguale alla corda AB e il terzo vertice C sulla retta parallela all'asse della parabola passante per il punto medio M di AB. Risulta quindi $C=(c; c^2)$ dove $c = \frac{a+b}{2}$.

E' facile vedere che la retta passante per C e parallela alla corda AB è tangente alla parabola.

L'area del triangolo ABC è la metà di quella del parallelogramma $ABA'B'$ la quale è data dal prodotto del segmento $h=MC$ per la larghezza l data dalla distanza delle due rette parallele AA' e BB' .

Risulta

$$l = a - b$$

$$h = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Il triangolo inscritto nel segmento parabolico AC ha quindi dimensioni

$$l_1 = a - c = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = \frac{l}{2}$$

$$h_1 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{4}\right)^2 = \frac{h}{4}$$

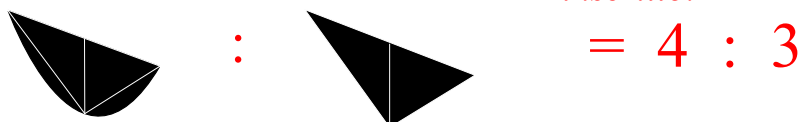
Ne segue che l'area del triangolo ACD è un ottavo dell'area del triangolo ABC. Analogamente per il triangolo BEC.

Cosa resta levando i triangoli

La mediana MC divide la parabola in due parti ognuna delle quali è contenuta in mezzo parallelogramma equivalente al triangolo inscritto. Ne segue che l'area del triangolo è maggiore di metà parabola. Se leviamo alla parabola il triangolo quello che resta è formato di a due ulteriori segmenti parabolici se leviamo a questi i rispettivi triangoli leviamo qualcosa di più grande della metà di quello che avevamo. Proseguendo in questo modo leviamo ogni volta qualcosa di più grande della metà di quello che avevamo e quindi usando il teorema di Euclide riusciamo a rendere il resto più piccolo di qualsiasi grandezza assegnata.

Teorema (Archimede)

L'area del segmento parabolico è quattro terzi l'area del massimo triangolo inscritto.



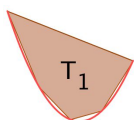
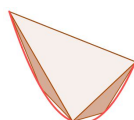
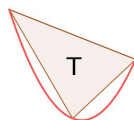
La costruzione di Archimede

Archimede costruisce una successione di poligoni con cui approssimare sempre meglio l'area della parabola. Per fare questo considera il triangolo inscritto T . Togliendo alla parabola il triangolo T , restano due nuovi segmenti parabolici i quali contengono due nuovi triangoli **l'area di ciascuno dei quali risulta essere 1/8 l'area di T** . Il pentagono T_1 ottenuto sommando i tre triangoli è inscritto nella parabola e ha area:

$$T_1 = T + \frac{1}{4}T$$

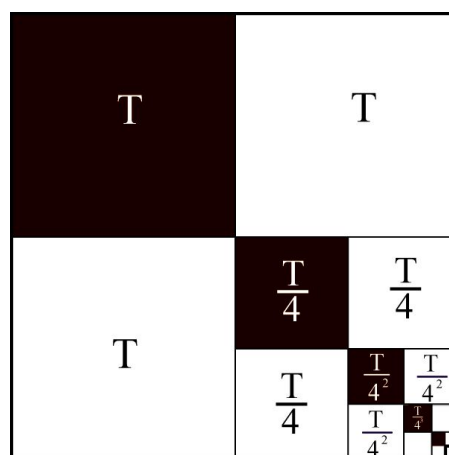
La superficie rimasta $P - T_1$ è ora formata da 4 segmenti parabolici ognuno dei quali contiene i rispettivi triangoli. L'area di questi triangoli sarà ancora 1/8 di quelli precedenti la cui area era 1/8 di T e dunque abbiamo 4 triangoli di area 1/64 di T . Il nuovo poligono T_2 di 9 lati risulta formato da T , due triangoli di area 1/8 di T e 4 triangoli di area 1/64 di T . Continuando in questo modo si raddoppia ogni volta il numero di triangoli da aggiungere ma si dividono per 8 le loro aree. In definitiva il poligono T_n formato da tutti questi triangoli, avrà area:

$$T_n = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \dots + \frac{1}{4^n}T$$



L'area dei poligoni inscritti

La grandezza T_n può essere valutata geometricamente con la figura seguente. Rappresentiamo la grandezza T con un quadrato. Osservando la figura si vede che:



$$3T + 3\frac{T}{4} + 3\frac{T}{4^2} + 3\frac{T}{4^3} + \dots + 3\frac{T}{4^n} = 4T - \frac{T}{4^n}$$

cioè: $3T_n = 4T - \frac{T}{4^n}$

La **dimostrazione di Archimede** procede ora per assurdo.

Non può essere $P > \frac{4}{3}T$. In questo caso possiamo, togliendo alla parabola P un numero sufficientemente grande di triangoli, ottenere un'area $P - T_n$ piccola quanto si vuole e quindi più piccola di $E = P - \frac{4}{3}T$. Ad ogni passo infatti **leviamo un'area maggiore della metà di quello che era rimasto**. Ma se $P - T_n$ è minore di E allora dovrà essere $T_n > \frac{4}{3}T$, il che è assurdo dato che $3T_n = 4T - \frac{T}{4^n}$.

Non può neppure essere $P < \frac{4}{3}T$. In questo caso, prendendo n abbastanza grande, possiamo rendere la grandezza $\frac{4}{3}T - T_n = \frac{T}{3 \cdot 4^n}$ piccola quanto vogliamo e quindi anche più piccola di $\frac{4}{3}T - P$. Ma in questo caso risulterebbe $P > T_n$, cosa assurda perché tutti i poligoni T_n sono contenuti in P e hanno quindi area minore di esso.