ARCHIMEDE E LA QUADRATURA DELLA PARABOLA

Vi sono due trattati giunti fino a noi dove Archimede si occupa della parabola: *Quadratura della parabola* e *Metodo sui teoremi meccanici.*

Per quanto riguarda il primo trattato citato, il suo titolo è certamente spurio, in quanto il termine "parabola" è stato introdotto in epoca successiva, mentre al tempo di Archimede veniva chiamata *sezione di cono rettangolo* ed era definita come la curva intersezione di un cono con angolo di apertura retto ed un piano perpendicolare ad una generatrice del cono medesimo (fig. 1).

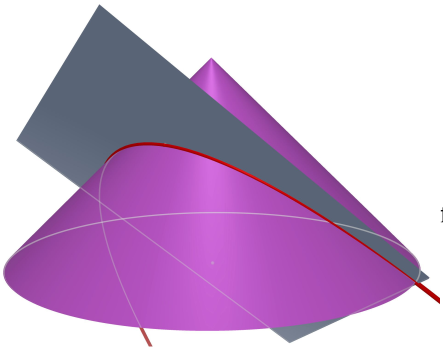


fig. 1

Tale curva risulta parallela ad una ed una sola generatrice del cono e l'intersezione tra il piano in cui è contenuta con il piano individuato da detta generatrice e l'asse del cono risulta asse di simmetria della curva (Archimede chiama *diametro* quello che noi chiamiamo asse di simmetria: fig. 2 e fig. 3); l'intersezione dell'asse con la parabola è il *vertice*.

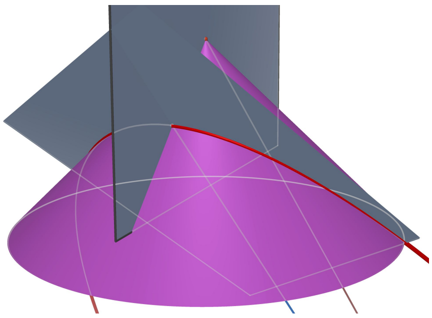


fig. 2

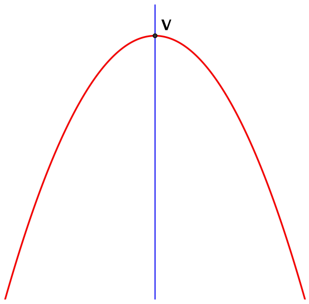


fig. 3

Si dice *segmento parabolico* la figura piana delimitata da un tratto di parabola individuato da due suoi punti e dal segmento lineare che li ha come estremi, detto *base* del segmento parabolico stesso (fig. 4).

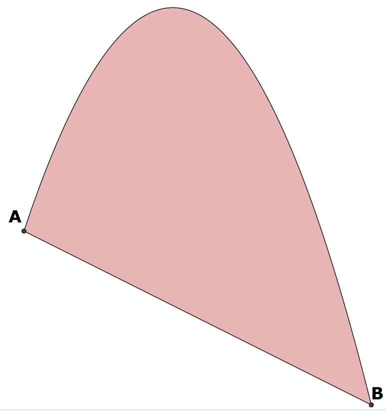


fig. 4

Il trattato *Quadratura della parabola* inizia con tre proposizioni che Archimede enuncia solamente, scrivendo che le dimostrazioni si trovano negli *Elementi conici*, probabilmente un'opera perduta di Euclide. Ne riportiamo gli enunciati di seguito nel linguaggio della matematica moderna.

Proposizione 1*. Dato un segmento parabolico con base AC, se BD è parallelo all'asse della parabola allora AD=DC se e solo se la tangente alla parabola in B è parallela alla base AC.* (fig. 5).

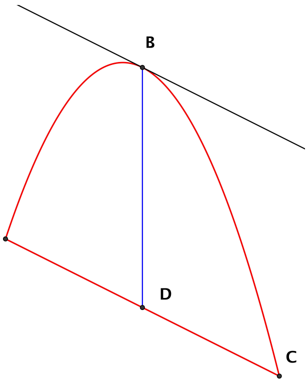


fig. 5

Proposizione 2. *Dato un segmento parabolico, se conduciamo per il punto medio D della base AC la parallela all'asse, che interseca la parabola in B, e chiamiamo E l'intersezione tra la retta BD e la tangente alla parabola in uno degli estremi della base, allora* $EB=BD$ (fig. 6).

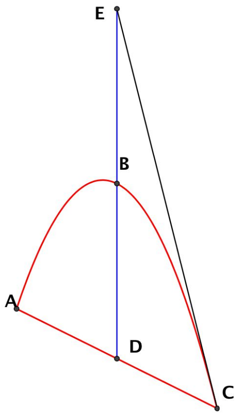


fig. 6

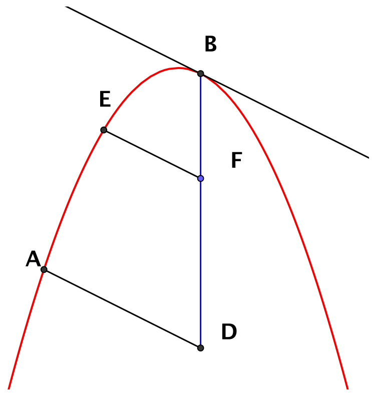
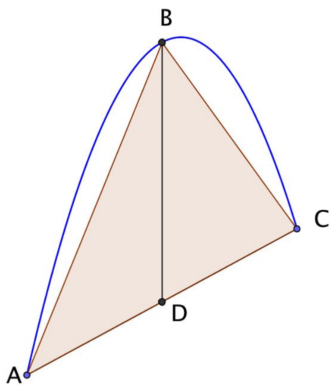


fig. 7

Proposizione 3. *Sia data una parabola, B sia un suo punto e BD una parallela all'asse ed F un punto di questo distinto da B e D. Se FE e AD sono parallele alla tangente in B, con A e E appartenenti alla parabola, allora* $\overline{BD}:\overline{BF}=\overline{AD}^2:\overline{EF}^2$ (fig. 7).



Quest'ultima proposizione esprime la fondamentale caratterizzazione della parabola che nella moderna geometria analitica esprimiamo con l'equazione $y=a\,x^2$, dove l'asse x è la tangente in B e l'asse y la retta BD.

fig. 8

Il risultato principale a cui giunge Archimede è la dimostrazione che l'area del segmento parabolico è uguale a quattro terzi quella del triangolo avente come base la stessa base del segmento e per terzo vertice il punto intersezione della parallela all'asse della parabola passante per il punto medio della base (fig. 8): $Area(Segmento\ ABC)=\frac{4}{3}Area(Triangolo\ ABC)$.

Questi tipi di risultati, ovvero l'espressione di aree di figure delimitate da “segmenti” curvilinei in termini di ordinari poligoni, vengono chiamati *quadrature*, in quanto è possibile poi, col solo uso di riga e compasso, trasformare i poligoni ordinari in quadrati equivalenti.

Archimede stesso considera così importante il suo risultato che lo dimostra in più modi: nella *Quadratura della parabola* utilizza una tecnica risalente ad Eudosso di Cnido (408-355 a. C.) chiamata dai matematici moderni *esaustione*, che significa esaurimento, in quanto consiste nel “riempire” la figura con una successione infinita di poligoni che ne “esauriscano” la superficie. Nel caso del segmento parabolico Archimede usa la successione di triangoli illustrata nella figura 9:

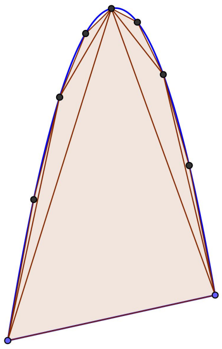


fig. 9

La dimostrazione più interessante è però senza dubbio quella che Archimede presenta nel trattato noto come *Il Metodo*, dove la genialità e l'originalità del grande Siracusano si rivela in un'idea veramente rivoluzionaria: l'applicazione della meccanica alla geometria.

La dimostrazione ha come base la proposizione 5 della *Quadratura della parabola*:

Proposizione 5. *Sia dato un segmento parabolico di base AC ed il triangolo AFC, dove AF è parallelo all'asse della parabola e AC è tangente alla parabola medesima in C. Consideriamo una retta parallela all'asse che intersechi AC in K, FC in L e la parabola in H. Allora vale la proporzione* $KH : HL = AK : KC$ *(fig. 10).*

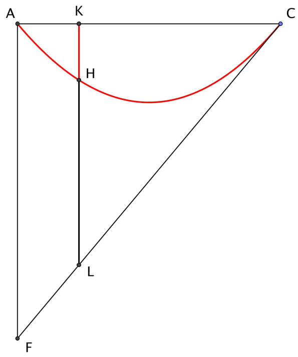


fig. 10

Applicando la proprietà del componendo otteniamo: $KL : KH = AC : AK$.

A questo punto Archimede introduce un'idea geniale: immagina che i segmenti KH e KL siano sbarrette materiali omogenee, aventi quindi baricentro coincidente col proprio centro geometrico e peso proporzionale alla loro lunghezza: $P_{KL} : P_{KH} = KL : KH = AC : AK$. Consideriamo ora il segmento DC, di cui A è punto medio, immaginiamo che si tratti di una leva con fulcro in A e spostiamo il segmento "pesante" KH in D (fig. 11):

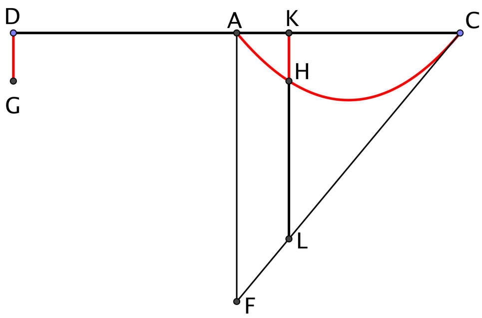


fig. 11

Poiché $P_{KL} : P_{DG} = P_{KL} : P_{KH} = AC : AK = AD : AK$, per il principio della leva, dimostrato dallo stesso Archimede (*Equilibrio dei piani*) si deduce che il segmento KH traslato in D equilibra il segmento KL lasciato al suo posto. Ripetendo il procedimento per tutti i segmenti rettilinei che compongono il segmento parabolico abbiamo che la parabola "concentrata" in D equilibra con il suo peso complessivo il triangolo AFC appeso per il suo baricentro, dato dal punto d'incontro delle mediane, la cui distanza dall'asse del segmento DC è quindi pari ad un terzo della lunghezza del segmento AC (figg. 12 e 13). Quindi l'area del segmento parabolico è pari ad un terzo quella del triangolo AFC.

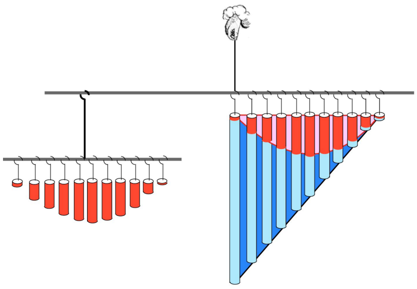


fig. 12

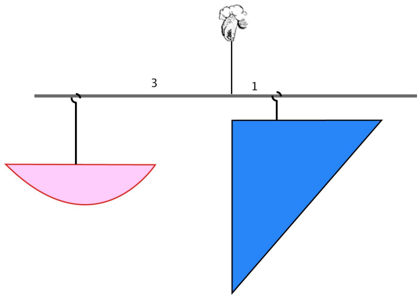


fig. 13

Consideriamo ora il punto medio M del lato AC del triangolo AFC e siano B e N i punti di intersezione della parallela all'asse della parabola passante per M rispettivamente con l'arco di parabola e con la tangente CF (fig. 14):

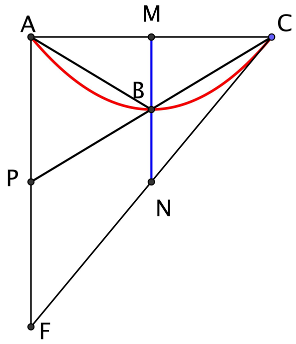


fig. 14

Dalla similitudine dei triangoli CAF e CMN e dalla proposizione 2 segue che l'area di CAF è doppia di quella di CAP (l'altezza dei triangoli è la stessa, mentre la base di uno è doppia di quella dell'altro); dalla similitudine dei triangoli CAP e CMB si deduce, con l'ausilio delle proposizioni 1 e 2, che l'area di CAP è a sua volta doppia di quella di CAB (hanno stessa base e uno altezza doppia dell'altro). In definitiva, il triangolo AFC ha area quadrupla di quella di ABC e dunque l'area del segmento parabolico è quattro terzi quella del triangolo ABC.