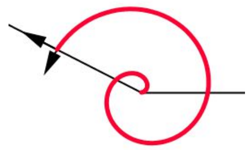
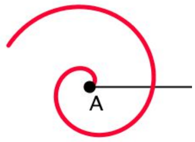
LA SPIRALE DI ARCHIMEDE

Archimede introduce la curva detta *spirale* e ne studia le proprietà in un trattato molto ammirato, ma poco studiato perché considerato una delle opere più difficili di Archimede, chiamato appunto *Sulle spirali* (in greco Περὶ ᾿Ελικῶν, *Perì Elikòn*). Di particolare importanza è l'introduzione, in cui è definita per la prima volta la generazione meccanica della spirale, la quale è descritta in un piano da un punto che si muove di moto uniforme lungo una retta, mentre la retta ruota di moto circolare uniforme intorno ad un punto. Riportiamo di seguito integralmente le definizioni di Archimede.

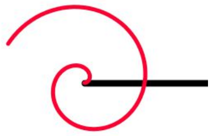
1. Se una linea retta è tracciata su un piano e se restando fissa una delle sue estremità, lei ruota con una velocità costante un numero qualunque di volte per riprendere la posizione da cui è partita; e si inoltre durante la rotazione della retta un punto si muove sulla retta con velocità costante a partire dalla estremità fissa, il punto descriverà una ***spirale*** *piana.*



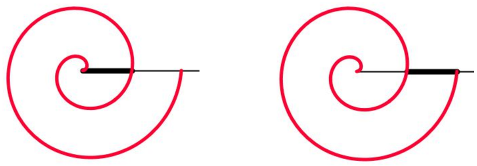
2. Chiamiamo ***origine della spirale*** *l'estremità delle retta che resta immobile durante la rotazione.*



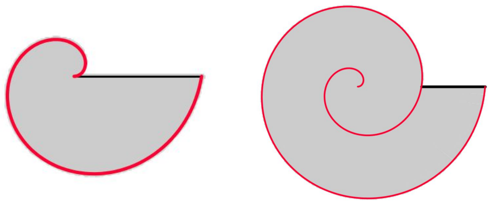
3. Chiamiamo ***origine della rivoluzione*** *la posizione della retta a partire dalla quale comincia a ruotare.*



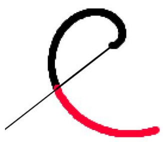
4. Chiamiamo ***primo segmento*** *il segmento che il punto che si muove sulla retta percorre durante la prima rivoluzione,* ***secondo segmento*** *il segmento che lo stesso punto percorre durante la seconda rivoluzione e designeremo nella stessa maniera gli altri segmenti secondo il numero della rivoluzione.*



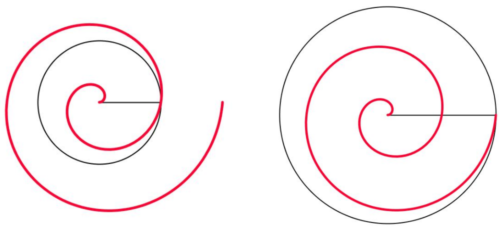
5. Chiamiamo ***prima area*** *l'area compresa tra la spirale descritta durante la prima rivoluzione e il primo segmento,* ***seconda area*** *l'area compresa tra la spirale descritta durante la seconda rivoluzione e il secondo segmento e così via per i nomi delle atre aree.*



*6. Se si traccia un segmento dall'origine della spirale, noi chiamiamo l'****avanti*** *tutto quello situato sul dal lato del segmento verso il quale si fa la rivoluzione e il* ***dietro*** *tutto quello situato dall'altra parte.*



7. Chiamiamo ***primo cerchio*** *il cerchio che ha come centro l'origine della spirale e raggio uguale al primo segmento,* ***secondo cerchio*** *il cerchio con lo stesso centro e raggio uguale al doppio e così via per i nomi agli altri cerchi.*

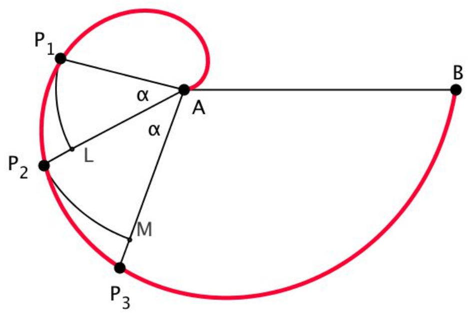


Possiamo descrivere la spirale di Archimede introducendo due parametri: la velocità angolare ω con la quale la retta ruota intorno all'origine della spirale A e la velocità v con il quale il punto si muove sulla retta che ruota. Tali velocità sono costanti e ciò significa, nel linguaggio dei rapporti, che se nel tempo t_1 la retta gira di un angolo α_1 e se nel tempo t_2 la retta gira di un angolo α_2 allora

$$\alpha_1 : \alpha_2 = t_1 : t_2 \text{ o anche } \alpha_1 : t_1 = \alpha_2 : t_2$$

Il rapporto costante $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{t_1}{t_2} = \omega$ è appunto, per definizione, la velocità angolare. Ugualmente si ragiona per il moto rettilineo uniforme: se s_1 è lo spazio percorso nel tempo t_1 e s_2 quello percorso nel tempo t_2 allora $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$ o anche $s_1 : t_1 = s_1 : t_2$. Il rapporto costante $\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_1}{t_2} = v$ è la velocità lineare.

Nel caso della spirale mettendo insieme i due movimenti abbiamo la seguente proposizione:



Se il segmento AP_1 ruota di un angolo a fino a raggiungere la posizione AP_2 e se il segmento AP_2 ruota dello stesso angolo a fino a raggiungere la posizione AP_3 , allora la differenza tra la lunghezza dei raggi non cambia:

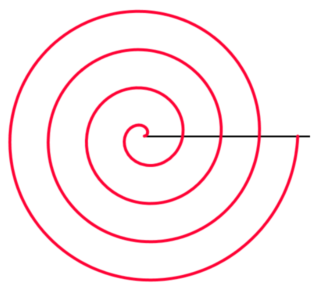
$$AP_3 - AP_2 = AP_2 - AP_1 \ .$$

Infatti se *t* è il tempo che la retta impiega per spostarsi da P_1 a P_2 , nello stesso tempo *t* la retta si sposterà da P_2 a P_3 e quindi lo spazio in più LP_2 che il punto P della spirale percorre nel tempo *t* sulla retta che ruota, sarà uguale allo spazio in più MP_3 che nello stesso tempo *t* il punto P percorre per andare da P_2 a P_3 .

Ecco come Archimede esprime questa proposizione.

Proposizione 12
Se si tracciano un certo numero di segmenti dall'origine della spirale alla spirale, e se i segmenti, qualunque sia il loro numero, formano tra loro angoli uguali, questi segmenti si incrementano uno dall'altro di una stessa grandezza.

Questo risultato implica in particolare una importante proprietà geometrica di queste spirali cioè il fatto che il primo segmento è uguale al secondo segmento che, a sua volta, è uguale al terzo segmento e così via per tutti gli altri.



Consideriamo il periodo T nel quale la retta che ruota compie un intero giro. In questo caso la velocità angolare sarà:

$$\omega = 2\frac{\pi}{T}$$

e il primo segmento AB sarà legato alla velocità v dalla relazione AB = v T poiché nel tempo T il punto della spirale si muove da A a B lungo la retta che ruota. Introducendo come parametro la lunghezza a=AB di tale segmento, possiamo esprimere la spirale in funzione di a e T. Abbiamo

$$v = \frac{a}{T}$$

e la forma della spirale dipende solo da *a* mentre T influenza la velocità con la quale il punto si muove lungo la sua traiettoria.

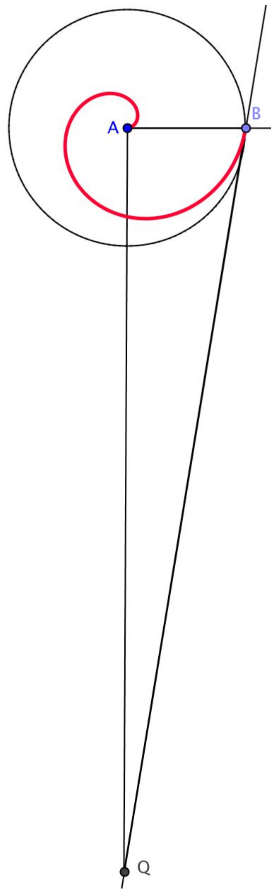
In un sistema di coordinate polari con polo nell'origine della spirale e asse nell'origine della rivoluzione otteniamo le equazioni $\theta = \omega t$ e $r = vt$. Eliminando il parametro t otteniamo l'equazione della spirale di Archimede in coordinate polari

$$\rho = v\frac{\theta}{\omega} = \frac{a}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot\theta = \frac{a}{2\pi}\theta$$

In coordinate cartesiane scegliendo un riferimento con l'origine nell'origine della spirale e asse delle ascisse nell'origine della rivoluzione abbiamo le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = v\,t\cos(\omega t) = \dfrac{a}{T}\cos\left(2\dfrac{\pi}{T}t\right) \\ x = v\,t\cos(\omega t) = \dfrac{a}{T}\sin\left(2\dfrac{\pi}{T}t\right) \end{cases}$$

LA SPIRALE E LA RETTIFICAZIONE DELLA CIRCONFERENZA



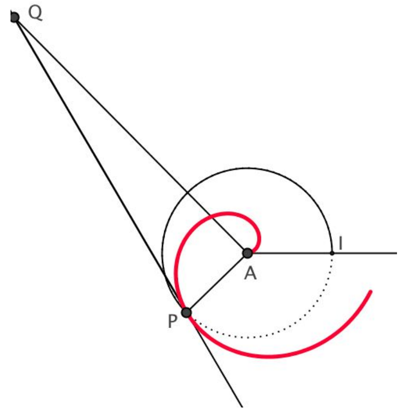
La retta BQ è tangente alla spirale nel punto B dove finisce la prima rivoluzione. Allora la lunghezza del segmento AQ è uguale alla circonferenza del primo cerchio.

Proposizione 18
Se una retta è tangente a una spirale descritta dalla prima rivoluzione, all'estremità della spirale e se dall'origine della spirale si eleva la perpendicolare alla retta origine della rivoluzione, questa perpendicolare incontra la tangente, e il segmento di questa perpendicolare compreso tra la tangente e l'origine della spirale sarà uguale alla circonferenza del primo cerchio.

Questo teorema permette, tracciando la spirale e la tangente di costruire un segmento lungo quanto una circonferenza e, viceversa, disegnato un segmento AQ perpendicolare al raggio AP lungo quanto la prima circonferenza tracciare la tangente alla spirale nel punto B.
Dal disegno si vede quanto è lunga una circonferenza. E' interessante citare l'episodio del film di S. Leone *Giù la testa,* dove si scommette se sia più lunga la circonferenza di un bicchiere molto alto o la sua altezza. Tutti a occhio sbagliano!

Nella proposizione 20 Archimede generalizza questo risultato descrivendo la retta tangente alla spirale in un punto qualsiasi della prima rivoluzione e nello stesso modo in un qualsiasi punto di una qualsiasi rivoluzione.

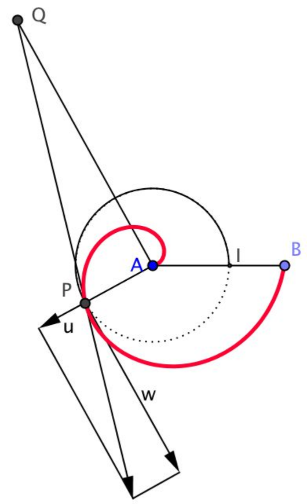
Proposizione 20
Sia P un punto della spirale sulla prima rivoluzione e PQ la retta tangente alla spirale nel punto P. Sia A l'origine della spirale e AI l'origine della rivoluzione e sia AQ perpendicolare a PA. In questa situazione il segmento AQ è uguale all'arco di circonferenza IP di centro A e raggio AP.



In generale se P è un punto della n-esima rivoluzione ed eseguiamo la medesima costruzione allora la lunghezza del segmento AQ è uguale alla lunghezza dell'arco IP aumentato di n-1 volte la lunghezza dell'intera circonferenza di raggio AP.

Le dimostrazioni archimedee di questi teoremi sono molto ingegnose e piuttosto complicate; esse si servono di alcune proposizioni "infinitesimali" che Archimede premette all'inizio del trattato.

Noi proponiamo un approccio di tipo più fisico che si deve a Roberval (1602-1675) la cui metodologia può applicarsi a diverse situazioni. L'idea si basa sulla considerazione che, quando un movimento si ottiene componendo due altri movimenti il vettore velocità, il quale è tangente alla traiettoria, risulta la somma vettoriale dei vettori velocità dei due movimenti che compongono il moto.



Nel nostro caso la velocità nel punto P sarà un vettore tangente alla spirale nel punto P ottenuto come somma del vettore ***u*** di modulo v diretto nella direzione AP (vettore velocità del moto rettilineo uniforme del punto P lungo la retta) e del vettore ***w*** di modulo ωr (r=AP) diretto ortogonalmente al raggio AP (vettore velocità del punto che si muove di moto circolare uniforme sulla circonferenza di raggio r=AP). Costruiamo il triangolo PAQ rettangolo in A. Abbiamo $AQ : AP = |\boldsymbol{w}| : |\boldsymbol{u}|$ e quindi

$$AQ=\frac{\omega r}{v}\,r$$

Se t è il tempo necessario per andare da A a P in questo tempo avremo $r=vt$ e $\theta=\ \omega t$, essendo θ l'angolo di cui ruota la retta AB nel tempo *t*. Facendo il rapporto otteniamo

$$\frac{\omega}{v}=\frac{\theta}{r}$$

e quindi $AQ=r\theta$ è la lunghezza dell'arco di circonferenza IP che è il risultato ottenuto da Archimede nella proposizione 20.
Nel caso che nel tempo *t* la retta ha percorso n-1 rivoluzioni complete e l'arco IP trovandosi quindi il punto P sulla n-esima rivoluzione, con le stesse notazioni e la medesima costruzione otteniamo gli stessi risultati, con la sola differenza che ora

$$\theta_n=2\pi(n-1)+\theta$$

e quindi il segmento AQ misura quanto n-1 circonferenze di raggi AP con l'aggiunta dell'arco IP sulla n-esima rivoluzione.